Université Toulouse 1 - Capitole
Algèbre approfondie

TD3 : Trigonalisation

Exercice 1

Soient les applications linéaire dont les matrices dans les bases canoniques sont :

$$A := \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \; B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; E := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ces matrices sont-elles diagonalisables ?
2. Ces matrices sont-elles trigonalisables dans $\mathbb{C}$?
3. Ces matrices sont-elles trigonalisables dans $\mathbb{R}$?
4. Lorsqu'elles sont trigonalisables déterminer une base dans laquelle l'application linéaire est triangulaire supérieure.

Exercice 2

Soit le système définit par récurrence par

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

et où x_0, y_0 et z_0 sont donnés.

1. Ecrire le système sous la forme
$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{où} \quad X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$
2. Trigonaliser A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n.