CONCOURS BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On considére l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer la représentation matricielle de f dans les bases canoniques.
4. Déterminer la représentation matricielle de f dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)$.
5. Discuter suivant les valeurs des paramètres $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, le nombre de solutions de $f(x,y,z) = (a,b,c)$.
6. Décrire géométriquement l'action par f sur un vecteur quelconque dans la base $\mathcal{B}$.
7. Décrire géométriquement l'action par f sur un vecteur quelconque dans les bases canoniques.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \ .$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $T_p = S_{2p}$.
   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$T_p = \sum_{k=1}^{p} (T_k - T_{k-1}) \ .$$
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $T_p - T_{p-1}$.
   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de T_p, puis celle de S_n si n est pair.
2. Si n est impair, quelle formule a-t-on pour S_{n-1} ? En déduire une expression pour S_n.
3. Donner une expression générale de S_n ne dépendant pas de la parité de n.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une succession de n individus $\{A_1, \cdots, A_n\}$ se transmet une information binaire du type “oui” ou “non”. L'individu A_k transmet à A_{k+1} l'information qu'il a reçue avec une probabilité de $p \in [0,1]$ ou la transforme en son contraire avec une probabilité de $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle détenue au départ par A_1.
2. En supposant $0 < p < 1$, déterminer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. On considère le sous-ensemble :

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - 2y + z = 0\}.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer un supplémentaire K de F dans E.

   (c) Déterminer la matrice de la projection sur F de direction K dans la base canonique.

2. (a) On pose $G = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $H = \text{vect}\{(1, 2, 3)\}$. Montrer que G et H sont supplémentaires dans F.

   (b) On pose $u = (x, y, z)$ un vecteur de F. Déterminer l'image de u par la projection sur G de direction H dans la base canonique.

3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $f : x \mapsto \cos(x + \pi/4)$.

   (a) Montrer que f appartient à $\text{vect}(\cos, \exp, \sin)$.

   (b) On pose $g = \cos + \exp + \sin$ et $h = \cos + 2\exp + 3\sin$. Montrer que f est combinaison linéaire de g et h.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On veut montrer le lemme des cordes (Paul Lévy (1886-1971)) : *il existe* $c \in [0, 1 - 1/n]$ *tel que :*

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right) .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) .$$

2. Montrer que si c n'existe pas, alors g est de signe constant.
3. Montrer que si g est strictement positive, alors $f(0) > f(1)$. Conclure.
4. Application : un coureur parcourt 10 kilomètres en 30 minutes. Montrer qu'il y a un kilomètre qu'il parcourt en 3 minutes exactement.

Exercice 2

Pour se rendre à son bureau en vélo, Monsieur T. met, en l'absence de feu rouge, 10 minutes. Mais il y a sur son trajet 6 feux, la probabilité qu'il puisse passer à chacun des feux (indépendamment des autres) étant de $2/3$. On admet que chaque arrêt à un feu fait perdre à Monsieur T. 2 minutes.

1. Soit D la variable aléatoire représentant la durée (en minutes) du parcours. Montrer que $D = aX + b$ où a et b sont des constantes à déterminer et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale à préciser.
2. Calculer $\mathbb{P}(D = 16)$.
3. Monsieur T. part de chez lui 15 minutes avant l'heure d'une réunion à son bureau. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non-vide de dimension finie.

1. On veut déterminer l'ensemble H des endomorphismes f de E tels que : pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ est liée.
   (a) Montrer que H est non vide.
   (b) Soit f dans H. Montrer que :
   $$\forall x \in E,\, \exists \alpha_x \in \mathbb{R},\, f(x) = \alpha_x x \ .$$
   (c) Soit f dans H. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
      i. Montrer que si (x, y) est une famille liée, alors $\alpha_x = \alpha_y$.
      ii. Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$.
      iii. En déduire que :
      $$\exists \lambda \in \mathbb{R}\,, \forall x \in E,\, f(x) = \lambda x \ .$$
2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes réels diagonalisables de E qui n'ont qu'une valeur propre.
3. La tour Eiffel mesure 300 m de hauteur. Elle est entièrement construite en fer, et pèse 8000 tonnes. Vous en achetez un modèle réduit de 1m de haut. Quel est son poids ?

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{xe^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}\ .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
4. Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g, et préciser les positions relatives de Γ et T.

Exercice 2

On considère trois boules numérotées de 1 à 3 que l'on réparti dans trois boîtes elles aussi numérotées de 1 à 3.

1. Donner un modèle probabiliste associé au problème.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une coïncidence entre le numéro de la boule et le numéro de la boîte ?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait auncune coïncidence ?

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On cherche à déterminer l'ensemble des suites qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\ , \tag{1}$$

u_0 et u_1 étant donnés.

1. Première méthode : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\}.$$

   (a) Montrer que F, muni des lois de E, est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - 2u_{n-1}.$$

      i. Exprimer v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

      ii. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telles que :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\, a_n + \beta\, b_n.$$

   (c) Montrer que la famille $\{a, b\}$ est libre. En déduire la dimension de F.

   (d) Exprimer, pour tout $n \geq 2$, u_n solution de (1) en fonction de u_0 et u_1.

2. Deuxième méthode :

   (a) Déterminer A tel que (1) s'écrive $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = {}^t(u_{n+1}, u_n)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

   (c) Déterminer la décomposition en produit $A = P\,D\,P^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P est une matrice inversible.

   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Exprimer, pour tout $n \geq 2$, u_n solution de (1) en fonction de u_0 et u_1.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit
$$f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) .$$
Déterminer la droite asymptote et la position de la courbe représentative de f par rapport à cette droite en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 2

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces et on considère les événements suivants :

— événement X : la somme des deux lancers vaut 6 ;

— événement Y : la somme des deux lancers vaut 7 ;

— événement Z : le premier lancer a donné 4.

Discuter de l'indépendance de ces trois événements.

CONCOURS BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 2.

Problème

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction du réel α.

1. On suppose $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.
2. Supposons maintenant $\alpha \in]1/2, 1]$. On définit la fonction φ par

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \varphi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que pour tout $x > 1$, on a

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y.$$

(b) En déduire que

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi x^{\alpha-1/2}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y.$$

(c) Démontrer que $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi\sqrt{y})}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

(d) Démontrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall t \geq 1$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+1/2}}$.

(e) En déduire que : $\forall (a,b) \in [1, +\infty[^2$, $a \leq b$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+1/2}}|a-b|$.

(f) Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ à l'aide de l'intégrale de φ. En déduire la nature de $\sum v_n$.

(g) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\mathrm{d}t$.

(h) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ on a $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+1/2}}$. En déduire la nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

(i) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Exercice 2

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges. On tire une boule dans l'urne, puis on remet la boule dans l'urne en ajoutant 2 boules de la même couleur.

Calculer la probabilité d'obtenir la première boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche nº 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Le but de ce problème est de montrer le Lemme de condensation de Cauchy : *Soit (u_n) une suite réelle positive et décroissante. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.*

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive et décroissante. Notons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

1. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, posons $v_k = 2^k u_{2^k}$. Montrer que $\frac{1}{2}v_3 \leq S_8 - S_4 \leq 4u_4$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{2}v_{k+1} \leq S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq v_k.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n}(S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
4. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et réciproquement.
5. Application : on considère la série de Riemann :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$
(on ne suppose pas connu ici la nature de cette série de cours). Pour $\alpha \geq 0$ vérifier les hypothèses du critère de condensation et montrer que la série de Riemann converge si et seulement si la série :
$$\sum_{n\geq 0} (2^{1-\alpha})^n.$$
est convergente. En déduire la nature de la série de Riemann selon la valeur de α.
6. Étudier de même la nature de la série dite de Bertrand :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \ln^\alpha n}.$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient F et G deux sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim F = \dim G = 2$ et $F \neq G$.

1. Déterminer la dimension de $F + G$.
2. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité

$$f_X(t) = \alpha(\mathbb{1}_{[-2,-1]}(t) + \mathbb{1}_{[1,2]}(t)).$$

1. Déterminer α.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Donner
$$\mathbb{P}(X \in]-1, 2[), \quad \mathbb{P}(X = \frac{3}{2}), \quad \mathbb{P}(X \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]).$$
4. On pose
$$Y = \exp(X).$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y en déterminant sa densité de probabilité.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On veut démontrer la *formule de Wallis* :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right)^2 = \pi.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
2. En déduire que la suite $(W_n)_n$ converge.
3. Montrer que la suite de terme général

$$J_n = (n+1)\, W_n\, W_{n+1}$$

   est constante et déterminer cette constante.
4. Montrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
5. Montrer que pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{cases} W_{2p} & = & \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] W_{2p+1} & = & \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

6. En déduire que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

7. Conclure.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 2z = 0\}$$

et

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y - 2z = 0\}\ .$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la projection sur E de direction F.

Exercice 2

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M1 et M2 pour fabriquer des masques FFP2 en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,01 et 0,008. De plus la probabilité de l'événement "la machine M2 est en panne sachant que M1 est en panne" est égale à 0,4.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Alice et Bob jouent aux dés. À tour de rôle, en commençant par Alice, chacun lance deux dés. Alice gagne si la somme des dés donne 6 et Bob gagne si la somme des dés donne 7. Dès qu'un des joueurs gagne, le jeu s'arrête ; tant qu'aucun des joueurs n'a gagné, le jeu continue. On suppose que les dés ne sont pas truqués.

1. Calculer la probabilité pour qu'Alice gagne dès son premier lancer.
2. Calculer la probabilité pour qu'Alice ne gagne pas à son premier lancer et que Bob gagne dès son premier lancer.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité A_n pour qu'Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer.
   (b) En déduire la probabilité a_n pour qu'Alice gagne en n lancers ou moins.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité B_n pour que Bob gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer.
   (b) En déduire la probabilité b_n pour que Bob gagne en n lancers ou moins.
5. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$.
6. Qui a le plus de chances de gagner ?

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Discuter suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t} t^{-n} \mathrm{d}t \,.$$

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Montrer que

$$\begin{array}{cccc} p: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y-z \\ -x-y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

est une projection orthogonale et la caractériser.

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Deux joueurs lancent simultanément chacun une pièce équilibrée comportant deux faces : Pile et Face. Si les joueurs ont obtenu le premier Pile au même essai, il y a match nul. Sinon le joueur qui a obtenu Pile en premier gagne.

Pour modéliser le jeu, on considère que le numéro du lancer auquel le joueur obtient son premier Pile suit une loi géométrique de paramètre $1/2$: $\mathcal{G}(1/2)$. Soit $X \sim \mathcal{G}(1/2)$ le numéro du lancer auquel le joueur 1 obtient son premier Pile et $Y \sim \mathcal{G}(1/2)$ le numéro du lancer auquel le joueur 2 obtient son premier Pile.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes.
2. Quelle est la probabilité que $X = Y$?
3. En utilisant la symétrie du problème, quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
4. On désigne par Z le nombre d'essais dans une partie, c'est-à-dire le nombre d'essais qui ont été effectués jusqu'à ce que l'un des deux joueurs soit déclaré vainqueur. Exprimer Z en fonction de X et de Y.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité que le jeu dure au moins n essais.
6. En déduire la loi de Z.
7. Combien de lancers en moyenne dure une partie ?

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^3$ équipé du produit scalaire usuel et muni de la base canonique.

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel orthogonal à

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0 \ \text{ et } \ y - z = 0\} \ .$$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canconique.
3. Déterminer la distance de $(-1, 1, 1)$ à F.
4. Déterminer la distance de $(2, 1, 0)$ à F.
5. Déterminer la distance de $(2, 1, 0)$ à l'orthogonal de F.

Exercice 2

Déterminer l'équation des branches asymptotiques en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de

$$x \mapsto (x - 1) \exp\left(\frac{1}{1 + x}\right) \ .$$

UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité la fonction f.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
   $$\lim_{x \to +\infty} x^{n+2} f(x) \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^{n+2} f(x)\ .$$
   (b) En déduire que X admet un moment de tout ordre.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X^{2p+1})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Donner les valeurs de t pour lesquelles $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe.
3. Soit $Z = e^X$. Déterminer la loi de Z.
4. Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln n$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis celle de Z_n.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $D := \text{vect}\{(1, a, 0)\}$, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur D.
2. Déterminer une base de $D^{\perp}$, l'orthogonal de D.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + ay = 0\}$.

Exercice 2

Déterminer les extrema, s'ils existent, de la fonction suivante :

$$f(x, y) = -10 + x^2 + 5y^2 - 3xy + x - 2y\ .$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On suppose que toutes les variables aléatoires dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2a^2}\right) & \text{si } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité la fonction f.
   (a) Montrer que X admet un moment d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer $\mathbb{E}(X^n)$ en fonction de $\mathbb{E}(X^{n-2})$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\mathbb{E}(X^n)$ en fonction de n et de a.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. On pose
   $$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{1}{n} \cdot \exp\left(\frac{Y_n^2}{2a^2}\right).$$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis celle de Z_n.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer
   $$F_Z(t) := \lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(t),$$
   où F_{Z_n} est la fonction de répartition de Z_n.
   (c) Vérifier que F_Z est une fonction de répartition.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^3 - 3M^2 + 3M$.
2. Démontrer que M est inversible.
3. Exprimer M^{-1} en fonction de M et I_3.

Exercice 2

Pour $n \geq 0$, on consière

$$u_n = \frac{4}{(n+1)(n+3)} .$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Déterminer la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

CONCOURS BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Alice et Bob s'affrontent lors d'une succession de parties d'un jeu de hasard. Ils possèdent initialement a et b euros respectivement. Lors d'une partie un des deux joueurs est désigné gagnant et l'autre perdant (sans possibilité d'égalité). À chaque partie le perdant donne un euro au gagnant, alimenant ainsi leur richesse. À chaque partie, on suppose qu'Alice a une probabilité p de perdre et une probabilité $q = 1 - p$ de gagner. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.

Soient a, b et N des entiers non nuls. Soit $N = a + b$. Pour $n \in [\![0, N]\!]$, on note p_n la probabilité qu'Alice finisse ruinée si elle commence avec n euros, et q_n la probabilité que Bob finisse ruiné s'il commence avec n euros.

1. Montrer que $(p - q)^2 = 1 - 4pq$.
2. Déterminer p_0 et p_N.
3. Si $p = 1/2$, pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, déterminer l'expression générale de p_a.
4. Si $p \neq 1/2$:
   (a) Montrer que pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, $p_a = pp_{a-1} + qp_{a+1}$.
   (b) En déduire l'expression générale de p_a.
5. Déterminer de même l'expression générale de q_b.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

1. Démontrer la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x \ .$$
2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$,
$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \ .$$
3. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, démontrer l'égalité
$$\int_0^\alpha \frac{x}{\ln x}\, dx = \int_0^{\alpha^2} \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x.$$
4. En déduire un encadrement de
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x \ .$$